Herleitung der Ableitung des natürlichen Logarithmus via implizite Differentiation

Wir wollen wie in der folgenden Sektion beschrieben zeigen, dass $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(|x|\right)\right) = \frac{1}{x}$ für alle $x \neq 0$.

Vorgehen

- Wir definieren $y(x) = \ln\left(|x|\right)$ (1).
- Wir wenden die Exponentialfunktion auf (1) an und erhalten dadurch eine Gleichung (2).
- Wir leiten (2) nach x ab, lösen nach $\frac{dy}{dx}$ auf und bekommen so das gewünschte Resultat.

Herleitung

Wir wenden die Exponentialfunktion auf beide Seiten der Gleichung $y(x) = \ln\left(|x|\right) = \begin{cases} \ln\left(x\right) & x > 0 \\ \ln\left(-x\right) & x < 0 \end{cases}$ an und erhalten dadurch:

$$e^{y(x)} = \begin{cases} e^{\ln(x)} = x & x > 0 \\ e^{\ln(-x)} = -x & x < 0 \end{cases} \tag{2}$$

Wir wissen bereits, dass $\frac{dx}{dx} = 1$ und aus einer der Definitionen der Exponentialfunktion auch dass $\frac{d}{dx}\left(e^{x}\right) = e^{x}$. Also können wir nun (2) unter Verwendung der Kettenregel nach x ableiten:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{y(x)}\right) = \begin{cases} \frac{dx}{dx} & x > 0 \\ -\frac{dx}{dx} & x < 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad e^{y}\frac{dy}{dx} = \begin{cases} 1 & x > 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$$

Wir lösen nach $\frac{dy}{dx}$ auf und setzen $y(x) = \begin{cases} \ln\left(x\right) & x > 0 \\ \ln\left(-x\right) & x < 0 \end{cases}$ ein:

$$\frac{dy}{dx} = \begin{cases} e^{-y} = e^{-\ln(x)} = \frac{1}{e^{\ln(x)}} = \frac{1}{x} & x > 0 \\ -e^{-y} = -e^{-\ln(-x)} = -\frac{1}{e^{\ln(-x)}} = \frac{1}{x} & x < 0 \end{cases}$$

Also ist $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(|x|\right)\right) = \frac{1}{x}$ für alle $x \neq 0$.