Herleitung der Eulerschen Formel via Differentialgleichung

Wir wollen die Eulersche Formel $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ wie in der nächsten Sektion beschrieben herleiten.

Vorgehen

- Wir schreiben e^{ix} als komplexe Zahl in Polarkoordinaten mit Radius r und Azimut ϕ (siehe Abbildung 1), also $e^{ix} = r\,(\cos(\phi) + i\sin(\phi))$ (1) .
- Wir leiten (1) nach x ab und erhalten eine (ebenfalls zweidimensionale) Gleichung (2), worin wir durch Verwendung von (1) e^{ix} eliminieren.
- Wir lösen (2) nach $\frac{dr}{dx}$ und $\frac{d\phi}{dx}$ und finden damit (durch direkte Integration) $r(x)$ und $\phi(x)$. All diese setzen wir nun in (2) ein, was eine Gleichung (3) ergibt.
- Mit Hilfe der Bedingung $e^0 = 1$ finden wir nun noch die zwei Integrationskonstanten in (3) und erhalten dadurch das gewünschte Resultat.

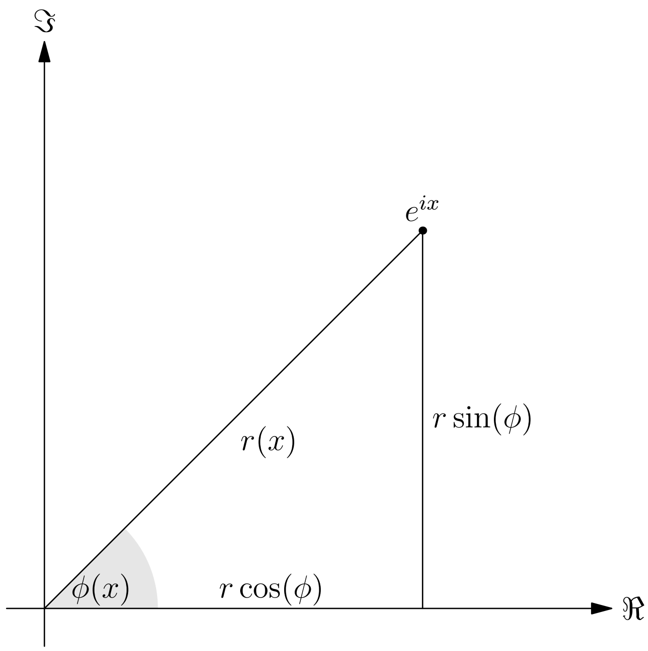

Abbildung 1: Polarkoordinaten von e^{ix}.

Herleitung

Ist e^{ix} eine komplexe Zahl (oder auch eine reelle, da diese eine Teilmenge der komplexen bilden), dann muss es möglich sein, sie wie jede andere komplexe Zahl in Polarkoordinaten auszudrücken. Diese Idee führt zur Gleichung (1), die wir nun mit Hilfe der Produkt-, Ketten- und Konstantenregel nach x ableiten:

$$\frac{d}{dx}\left(e^{ix}\right) = \frac{d}{dx}\left(r(x)\left(\cos(\phi(x)) + i\sin(\phi(x))\right)\right)$$

$$ie^{ix} = \frac{dr}{dx}\left(\cos(\phi) + i\sin(\phi)\right) + r\left(-\sin(\phi)\frac{d\phi}{dx} + i\cos(\phi)\frac{d\phi}{dx}\right) \tag{2}$$

Wir ersetzen e^{ix} auf der linken Seite dieser Gleichung mit dem Polarkoordinatenausdruck in (1) und multiplizieren die Klammern aus:

$$ir\left(\cos(\phi) + i\sin(\phi)\right) = \frac{dr}{dx}\left(\cos(\phi) + i\sin(\phi)\right) + r\left(-\sin(\phi)\frac{d\phi}{dx} + i\cos(\phi)\frac{d\phi}{dx}\right)$$

$$ir\cos(\phi) - r\sin(\phi) = \frac{dr}{dx}\cos(\phi) + i\frac{dr}{dx}\sin(\phi) - r\sin(\phi)\frac{d\phi}{dx} + ir\cos(\phi)\frac{d\phi}{dx}$$

Da die Real- ($\Re$) und Imaginärteile ($\Im$) beider Seiten gleich sein müssen, erhalten wir folgendes Gleichungssystem:

$$\Re\left(ir\cos(\phi) - r\sin(\phi)\right) = \Re\left(\frac{dr}{dx}\cos(\phi) + i\frac{dr}{dx}\sin(\phi) - r\sin(\phi)\frac{d\phi}{dx} + ir\cos(\phi)\frac{d\phi}{dx}\right) \tag{I}$$

$$\Im\left(ir\cos(\phi) - r\sin(\phi)\right) = \Im\left(\frac{dr}{dx}\cos(\phi) + i\frac{dr}{dx}\sin(\phi) - r\sin(\phi)\frac{d\phi}{dx} + ir\cos(\phi)\frac{d\phi}{dx}\right) \tag{II}$$

$$-r\sin(\phi) = \frac{dr}{dx}\cos(\phi) - r\sin(\phi)\frac{d\phi}{dx} \qquad \text{(I)} \qquad\qquad r\cos(\phi) = \frac{dr}{dx}\sin(\phi) + r\cos(\phi)\frac{d\phi}{dx} \qquad \text{(II)}$$

Wir multiplizieren (I) mit $\cos(\phi)$ und (II) mit $\sin(\phi)$:

$$-r\sin(\phi)\cos(\phi) = \frac{dr}{dx}\cos^2(\phi) - r\sin(\phi)\cos(\phi)\frac{d\phi}{dx} \tag{Ia}$$

$$r\sin(\phi)\cos(\phi) = \frac{dr}{dx}\sin^2(\phi) + r\sin(\phi)\cos(\phi)\frac{d\phi}{dx} \tag{IIa}$$

Wir addieren (Ia) zu (IIa) und nutzen die trigonometrische Identität $\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi) = 1$:

$$\text{(Ia)+(IIa):} \qquad 0 = \frac{dr}{dx}\left(\cos^2(\phi) + \sin^2(\phi)\right) \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\frac{dr}{dx} = 0}$$

Mit $\frac{dr}{dx} = 0$ wird (II) zu:

$$r\cos(\phi) = r\cos(\phi)\frac{d\phi}{dx} \qquad \Rightarrow \qquad \underline{\frac{d\phi}{dx} = 1}$$

Durch direktes Integrieren finden wir, dass, da $\frac{dr}{dx} = 0$, $\underline{r(x) = c_1}$ und, weil $\frac{d\phi}{dx} = 1$, $\underline{\phi(x) = x + c_2}$, wobei c_1 und c_2 Integrationskonstanten sind. Damit wird Gleichung (2) zu:

$$ie^{ix} = c_1\left(-\sin(x+c_2) + i\cos(x+c_2)\right) \qquad \Rightarrow \qquad e^{ix} = c_1\left(\cos(x+c_2) + i\sin(x+c_2)\right) \qquad (3)$$

Um die Werte der Konstanten c_1 und c_2 zu ermitteln, können wir die Bedingung $e^0 = 1$ nutzen. Also, mit $x = 0$, wird Gleichung (3) zu $1 = c_1\left(\cos(c_2) + i\sin(c_2)\right)$.

Setzen wir wie oben Real- und Imaginärteile gleich, erhalten wir das folgende Gleichungssystem:

$$\Re\,(1) = \Re\left(c_1\cos(c_2) + ic_1\sin(c_2)\right) \qquad (\mathrm{III}) \qquad\qquad \Im\,(1) = \Im\left(c_1\cos(c_2) + ic_1\sin(c_2)\right) \qquad (\mathrm{IV})$$

$$1 = c_1\cos(c_2) \qquad (\mathrm{III}) \qquad\qquad 0 = c_1\sin(c_2) \qquad (\mathrm{IV})$$

(IV) ergibt eine wahre Aussage mit $c_1 = 0$ und/oder mit $\sin(c_2) = 0$. c_1 kann nicht Null sein, da sonst (III) nicht erfüllt wäre und somit benötigen wir:

$$\sin(c_2) = 0 \qquad \Rightarrow \qquad c_2 = n\pi \text{ für } n \in \mathbb{Z}$$

Da $\cos(c_2) = 1$ für gerade n, also $c_2 = 2k\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$ und $\cos(c_2) = -1$ für ungerade n, also $c_2 = (2k+1)\,\pi$ für $k \in \mathbb{Z}$, haben wir zwei mögliche Fälle zu untersuchen, nämlich $c_1 = 1$, $c_2 = 2k\pi$ und $c_1 = -1$, $c_2 = (2k+1)\,\pi$.

Für $c_1 = 1$, $c_2 = 2k\pi$:

Gleichung (3) wird zu $e^{ix} = \cos(x+2k\pi) + i\sin(x+2k\pi)$. Aber Sinus und Kosinus sind 2π-periodisch und somit ist $\cos(x+2k\pi) = \cos(x)$ und $\sin(x+2k\pi) = \sin(x)$. Also haben wir in diesem Fall $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$.

Für $c_1 = -1$, $c_2 = (2k+1)\,\pi$:

Gleichung (3) wird zu $e^{ix} = -\left(\cos(x+2k\pi+\pi) + i\sin(x+2k\pi+\pi)\right)$. Aber aus demselben Grund wie oben ist $\cos((x+\pi)+2k\pi) = \cos(x+\pi)$ und $\sin((x+\pi)+2k\pi) = \sin(x+\pi)$ und weil $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ und $\sin(x+\pi) = -\sin(x)$ ist, ist also $\cos(x+(2k+1)\,\pi) = -\cos(x)$ und $\sin(x+(2k+1)\,\pi) = -\sin(x)$. Somit ergibt sich hier ebenfalls $e^{ix} = -\left(-\cos(x) - i\sin(x)\right) = \cos(x) + i\sin(x)$.

Beide Fälle führen wie erwartet zum selben Ergebnis, nämlich $\underline{e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)}$.