Herleitung der quadratischen Formel (Mitternachtsformel) via quadratische Ergänzung

Wir wollen die quadratische Formel (hierzulande auch als Mitternachtsformel bekannt) $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, die uns die Lösungen einer quadratischen Gleichung in Allgemeinform, also $ax^2 + bx + c = 0$ (1) mit $a \neq 0$, liefert, wie in der nächsten Sektion beschrieben herleiten.

Vorgehen

- Wir machen eine quadratische Ergänzung von (1).
- Wir lösen die Gleichung nach dem quadrierten Binom auf.
- Wir ziehen die Quadratwurzel und erhalten durch Lösen der dadurch entstandenen Gleichung nach x das gewünschte Resultat.

Herleitung

Wir klammern a in (1) aus:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = 0$$

Wir fügen nach den ersten beiden Termen in der Klammer einen konstanten Term $\left(\frac{b}{2a}\right)^2$ ein, der so gewählt ist, dass die ersten drei Terme der Klammer zusammen ein quadriertes Binom ergeben. Diesen ziehen wir auch sogleich wieder ab, um die Gleichung nicht zu verfälschen:

$$a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = 0$$

Da nun $x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2$, erhalten wir:

$$a\left(\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a} - \left(\frac{b}{2a}\right)^2\right) = 0$$

Wir multiplizieren die äusserste Klammer aus und lösen die Gleichung nach dem quadrierten Binom auf:

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

Wir ziehen die zweite Wurzel, lösen danach nach x und erhalten so das gewünschte Resultat:

$$x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad \Rightarrow \quad x = -\frac{b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \underline{\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}}$$

Also sind die Lösungen von (1) gegeben durch $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.