Herleitung der Euler-Lagrange Gleichung via Gâteaux-Differential

Wir wollen wie in der nächsten Sektion beschrieben die Euler-Lagrange Gleichung für das Funktional $S\left[y(x)\right] = \int_a^b F\left(x, y(x), y'(x)\right)\, dx$ (1) mit Randbedingungen $y(a) = A$ und $y(b) = B$, nämlich $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$, $y(a) = A$, $y(b) = B$, herleiten.

Vorgehen

- Falls das Funktional (1) einen stationären Pfad $y(x)$ hat, dann muss dieser Pfad dessen erste (generalisierte) Ableitung, das Gâteaux-Differential, Null machen. Also wenden wir das Gâteaux-Differential auf (1) an, setzen es gleich Null und erhalten dadurch (2).
- Wir drücken $S\left[y + \epsilon h\right]$ in (2) mit Hilfe einer Taylor Expansion von F um (x, y, y') bis $O(\epsilon)$ aus.
- Wir nutzen die Leibnizregel für die Differentiation unter dem Integral, um die Operationsreihenfolge umzukehren und erhalten dadurch eine Gleichung (3).
- Wir eliminieren h' in (3) durch partielle Integration, wenden das fundamentale Lemma der Variationsrechnung auf die dadurch entstandene Gleichung an und erhalten somit das gewünschte Resultat.

Herleitung

Das Gâteaux-Differential eines Funktionals $S\left[y(x)\right]$ mit zulässiger Variation $h(x)$ - also h in $\mathcal{D}_1\left(a, b\right)$ für schwache oder h in $\mathcal{D}_0\left(a, b\right)$ für starke Variationen und $h(a) = h(b) = 0$ - und mit $F, h \in C^n\left[a, b\right]$ für $n \geq 2$ ist:

$$\Delta S\left[y(x), h(x)\right] = \lim_{\epsilon \to 0}\left(\frac{d}{d\epsilon}\left(S\left[y + \epsilon h\right]\right)\right)$$

Für einen stationären Pfad des Funktionals S benötigen wir:

$$\Delta S = \lim_{\epsilon \to 0}\left(\frac{d}{d\epsilon}\left(S\left[y + \epsilon h\right]\right)\right) = 0 \qquad (2)$$

Mit einem zulässigen, variierten Pfad $y + \epsilon h$ wird (1) zu:

$$S\left[y + \epsilon h\right] = \int_a^b F\left(x, y + \epsilon h, y' + \epsilon h'\right)\, dx$$

Also muss sowohl h wie auch h' beschränkt sein und somit benötigen wir h in $\mathcal{D}_1\left(a, b\right)$, um fortfahren zu können.

Wir machen eine Taylor Expansion von F um (x, y, y') bis $O(\epsilon)$:

$$F\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ y' \end{pmatrix}^T + \begin{pmatrix} 0 \\ \epsilon h \\ \epsilon h' \end{pmatrix}^T\right) = F\left(x, y, y'\right) + 0 \cdot F_x + \epsilon h F_y + \epsilon h' F_{y'} + O(\epsilon^2)$$

, wobei $F_x = \frac{\partial F}{\partial x}$, $F_y = \frac{\partial F}{\partial y}$ und $F_{y'} = \frac{\partial F}{\partial y'}$ ist.

Also haben wir:

$$S\left[y+\epsilon h\right]=\int\limits_a^b \left(F\left(x,y,y'\right)+\epsilon hF_y+\epsilon h'F_{y'}+O(\epsilon^2)\right)\,dx$$

Und damit wird (2) zu:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{d}{d\epsilon}\left(\int\limits_a^b \left(F\left(x,y,y'\right)+\epsilon hF_y+\epsilon h'F_{y'}+O(\epsilon^2)\right)\,dx\right)\right)=0$$

Da a und b Konstanten sind, können wir hier den Spezialfall der Leibnizregel für die Differentiation unter dem Integral, nämlich $\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x,t)\,dt\right)=\int_a^b \frac{\partial}{\partial x}\left(f(x,t)\right)\,dt$, anwenden:

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\frac{d}{d\epsilon}\left(\int\limits_a^b \left(F\left(x,y,y'\right)+\epsilon hF_y+\epsilon h'F_{y'}+O(\epsilon^2)\right)\,dx\right)\right)=\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int\limits_a^b \frac{\partial}{\partial\epsilon}\left(F\left(x,y,y'\right)+\epsilon hF_y+\epsilon h'F_{y'}+O(\epsilon^2)\right)\,dx\right)=0$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left(\int\limits_a^b \left(hF_y+h'F_{y'}+O(\epsilon)\right)\,dx\right)=0\quad\Rightarrow\quad\int\limits_a^b \left(hF_y+h'F_{y'}\right)\,dx=0$$

$$\Rightarrow\quad\int\limits_a^b hF_y\,dx+\int\limits_a^b h'F_{y'}\,dx=0\qquad(3)$$

Wir integrieren den zweiten Integral in (3) partiell:

Zeichen	Differentiation	Integration
+	$F_{y'}$	h'
-	$\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)$	h

Und erhalten somit:

$$\int\limits_a^b h'F_{y'}\,dx=\left[F_{y'}h\right]_a^b-\int\limits_a^b \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)h\,dx$$

Da aber (wie anfangs erwähnt) für eine zulässige Variation $h(a)=h(b)=0$, haben wir:

$$\left[F_{y'}h\right]_a^b=F_{y'}|_{x=b}h(b)-F_{y'}|_{x=a}h(a)=0$$

Also ist $\int_a^b h'F_{y'}\,dx=-\int_a^b \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)h\,dx$ und damit wird (3) zu:

$$\int\limits_a^b hF_y\,dx+\int\limits_a^b h'F_{y'}\,dx=\int\limits_a^b hF_y\,dx-\int\limits_a^b \frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)h\,dx=0$$

$$\Rightarrow\quad\int\limits_a^b \left(\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right)-F_y\right)h(x)\,dx=0$$

Nutzen wir nun das fundamentale Lemma der Variationsrechnung, wonach $\int_a^b z(x)h(x)\,dx = 0$ für alle zulässigen h nur wenn $z(x) = 0$, erhalten wir:

$$\underline{\frac{d}{dx}\left(F_{y'}\right) - F_y = 0}$$

Also ist $\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial F}{\partial y'}\right) - \frac{\partial F}{\partial y} = 0$ mit $y(a) = A$ und $y(b) = B$ nötig für einen stationären Pfad $y(x)$ des Funktionals S. Dies ist die Euler-Lagrange Gleichung für S.